Dr. Anton Malevich

Aufgaben des Präsenzblattes

Aufgabe 9.2

a) $n^3 + 2n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar.

IA) $n = 1$: $1^3 + 2 = 3$ ist durch 3 teilbar. ✓

IV) Es gelte die Aussage für ein beliebiges fixes $n \in \mathbb{N}$.

IS) $n \mapsto n + 1$:

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = 3 \cdot (n^2 + n + 1) + (n^3 + 2n)$$

Der erste Summand ist ein Vielfaches von 3, der zweite ist nach IV durch 3 teilbar. ✓

b) $\displaystyle\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{(m-1)m} = 1 - \frac{1}{n}.$

IA) $n = 2$ (Für $n = 1$ ist die Summe nicht definiert!): $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$. ✓

IV) Es gelte die Aussage für ein beliebiges fixes $n \in \mathbb{N}$.

IS) $n \mapsto n + 1$:

$$\sum_{m=2}^{n+1} \frac{1}{(m-1)m} = \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{(m-1)m} + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$\overset{\text{IV}}{=} 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{(n+1)-1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}. \qquad ✓$$

c) $n^2 \geq 2n + 2$ für alle $n \geq 3$.

IA) $n = 3$: $9 \geq 8$. ✓

IV) Es gelte die Aussage für ein beliebiges fixes $3 \leq n \in \mathbb{N}$.

IS) $n \mapsto n + 1$:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{\text{IV}}{\geq} (2n+2) + 2n + 1 \geq 2(n+1) + 2,$$

wobei die letzte Ungleichung wegen $2n + 1 \geq 2$ für alle $n \geq 3$ stimmt. ✓

d) $n^2 - 1$ ist für alle ungerade $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ durch 8 teilbar.

IA) $n = 3$: 8 ist durch 8 teilbar. ✓

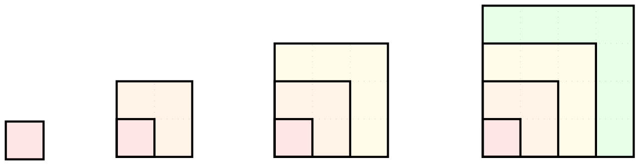
IV) Es gelte die Aussage für ein beliebiges fixes ungerades $3 \leq n \in \mathbb{N}$.

IS) $n \mapsto n + 2$ (ungerade!):

$$(n+2)^2 - 1 = n^2 + 4n + 4 - 1 = (n^2 - 1) + 4(n+1).$$

Nach IV ist $n^2 - 1$ durch 8 teilbar. Da n ungerade ist, ist $n + 1$ gerade, somit $4(n + 1)$ durch 8 teilbar. Beide Summanden durch 8 teilbar $\Rightarrow$ Summe durch 8 teilbar. ✓

Aufgabe 9.3



$1 \qquad 1+3 \qquad 1+3+5 \qquad 1+3+5+7$

Vermutung: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

IA) $n = 1$: $1 = 1$ ✓

IV) Es gelte die Formel für ein beliebiges fixes $n \in \mathbb{N}$.

IS) $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + \big(2(n+1)-1\big) \overset{\text{IV}}{=} n^2 + (2n+1) = (n+1)^2. \qquad \checkmark$$

Aufgabe 9.5 7, 1, 792, 1287, 1225, 20 475.

Aufgabe 9.6 a) (i) 15, (ii) 43200; b) 15625; c) 16; d) 576.

Aufgaben des Extrablattes

Aufgabe 9.1

g) $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar.

IA) $n = 1$: $3^3 + 2^0 = 28$ ist durch 7 teilbar. ✓

IV) Es gelte die Aussage für ein beliebiges fixes $n \in \mathbb{N}$.

IS) $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} &3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)-1} = 3^{2n+3} + 2^n = 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n-1} \\ =&7 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n-1} = 7 \cdot 3^{2n+1} + 2(3^{2n+1} + 2^{n-1}) \end{aligned}$$

Der erste Summand ist ein Vielfaches von 7, der zweite ist nach IV durch 7 teilbar. ✓

h#) $2^n \geq n^2 - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

IA) $n = 1$: $2 \geq 0$; $n = 2$: $4 \geq 3$; $n = 3$: $8 \geq 8$. ✓

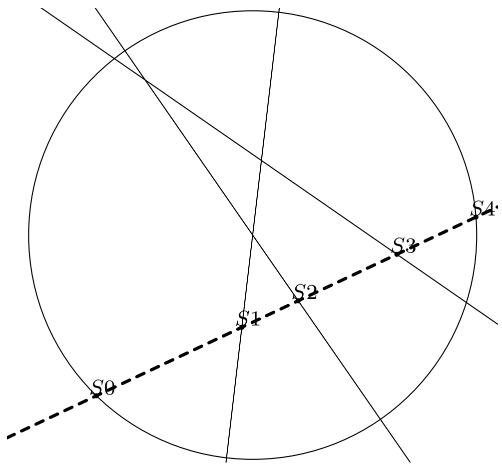
IV) Es gelte die Aussage für ein beliebiges fixes $3 \leq n \in \mathbb{N}$.

IS) $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} 2^{(n+1)} &= 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{\geq} 2(n^2-1) = 2n^2 - 2 = n^2 + n^2 - 2 \\ &\overset{\text{Teil d)}}{\geq} n^2 + (2n+2) - 2 = n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Aufgabe$^{\#}$ 9.2 Wir stellen uns die Pizza als ein Kreis da, und die Schnitte als Geraden, die den Kreis in zwei Punkten schneiden. Der Trick ist nun zu verstehen, wieviele neue Stücke maximal nach dem n-ten Schnitt entstehen können. Klar entstehen nach dem ersten Schnitt maximal 2 Stücke, nach dem zweiten können wieder maximal zwei neue entstehen. Angenommen, es sind bereits $n-1$ Schnitte gemacht worden ($n \geq 2$), wir haben also $n-1 \geq 1$ Geraden. Wir betrachten die neue, n-te, Gerade. Diese schneidet sich im besten Fall mit allen $n-1$ bisherigen Geraden innerhalb des Kreises. Bezeichnen wir die Schnittpunkte $S_1, \ldots, S_{n-1}$, so sind die Stücke zwischen 2 benachbarten Schnittpunkten sowie links von S_1 und rechts von S_{n-1} (siehe Bild) in zwei geteilt. Somit entstehen maximal n neue Stücke beim n-ten ($n \geq 2$ Schnitt).

Insgesamt erhalten wir somit maximal $2+2+3+\ldots+n = 1+\frac{1}{2}n(n+1)$ Stücke nach n Schnitten.



Aufgabe 9.3 a) 256, b) 0, c) 6561, d) 1024.

Aufgabe 9.4 (i) $\frac{16}{65}$, (ii) $\frac{1}{26}$, (iii) ?, (iv) $\frac{93}{130}$.

Aufgabe 9.5 a) 210; b) (i) 120, (ii) 60, (iii) 420, (iv) 83160; c) 5040; d) $\frac{(28)!}{(7!)^4}$; e) 945.